

Intégration et probabilités, USTC - 2026

Nom de l'étudiant: Jacques

4 mars 2026

TD1 : Limites d'ensembles

Question 1 (Ensembles dénombrables). *On rappelle qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une application injective $i : E \rightarrow \mathbb{N}$. Montrer que les ensembles suivants sont dénombrables, en exhibant une application injective correspondante :*

- (a) $E = \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
- (b) $E = \mathbb{N}^2$. Indication : on pourra représenter les points de $\mathbb{N}^2$ par un réseau dans $\mathbb{R}^2$.
- (c) $E = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres rationnels positifs. Indication : on pourra se servir de la question précédente.
- (d) L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Solution 1. (a)

$$i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 2x, & \text{si } x \geq 0 \\ -2x - 1, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{justifier l'injectivité}$$

(b)

$$i : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(x, y) \longmapsto \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y \quad \text{justifier l'injectivité}$$

- (c) Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>0}$, alors il existe un unique couple (p, q) tel que $r = p/q$ et p et q sont premiers entre eux.

Donc on a une injection

$$j : \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{N}^2$$
$$r = p/q \longmapsto \begin{cases} (0, 0), & \text{si } r = 0 \\ (p, q), & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où on obtient une application injective $i \circ j : \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ ok

(d) Comme f est croissant, l'ensemble des points de discontinuité de f est :

$$D = \{x \in [0, 1] : \lim_{t \rightarrow x^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) > 0\}. \quad \text{justifier que les 2 limites existent}$$

Pour chaque $x \in D$, on peut associer un nombre rationnel $q_x \in \mathbb{Q}$ tel que :

$$\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) < q_x < \lim_{t \rightarrow x^+} f(t).$$

Un tel q_x existe par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

L'application $x \mapsto q_x$ est injective. En effet, si $x < y$ sont deux points de D , alors par croissance de f , on a :

$$\lim_{t \rightarrow x^+} f(t) \leq \lim_{t \rightarrow y^-} f(t),$$

et les intervalles $(\lim_{t \rightarrow x^-} f(t), \lim_{t \rightarrow x^+} f(t))$ et $(\lim_{t \rightarrow y^-} f(t), \lim_{t \rightarrow y^+} f(t))$ sont disjoints. Les rationnels q_x et q_y sont donc distincts. ok

Ainsi, il existe une application injective $i : D \rightarrow \mathbb{Q}$, donc D est dénombrable. ok

Question 2 (lim sup et lim inf de suites). Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels, on pose

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$

- (a) Montrer que $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, en autorisant les valeurs d'adhérence infinies.
- (b) Vérifier que $(a_n)_n$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell.$$

- (c) Soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une autre suite de réels. Montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

$$A-t-on toujours \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n ?$$

Solution 2. (a) Soit E l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(a_n)_{n \geq 0}$. Soit $\alpha_n = \sup_{k \geq n} a_k$, alors (α_n) est décroissant. ok

Nous démontrons seulement $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup E$; la preuve pour $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf E$ est analogue.

(1) Supposons d'abord que $\sup E$ est fini. Soit $l \in E$. Il existe une sous-suite (a_{i_k}) de (a_n) telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i_k} = l$. Pour tout n fixé, prenons $k \geq n$; alors $i_k \geq k \geq n$, donc

$$a_{i_k} \leq \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} = \alpha_n.$$

En faisant tendre $k \rightarrow \infty$, on obtient $l \leq \alpha_n$. Comme l est arbitraire dans E , on a $\sup E \leq \alpha_n$. Ainsi (α_n) est une suite décroissante et minorée, donc convergente. On a donc

$$\sup E \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n. \quad \text{OK}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $a_n \leq \sup E + \varepsilon$. Par conséquent, expliquer pourquoi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \sup E + \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sup E. \quad \text{ok}$$

(2) Supposons maintenant que $\sup E = +\infty$. Alors il existe une sous-suite tendant vers $+\infty$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} = +\infty.$$

(3) Supposons enfin que $\sup E = -\infty$. Cela signifie que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Pour tout $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $a_n < -A$. Alors

$$\alpha_{n_0} = \sup\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots\} \leq -A.$$

Donc pour tout $n \geq n_0$, on a $\alpha_n \leq \alpha_{n_0} \leq -A$, ce qui signifie précisément que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -\infty$. ok

Par conséquent,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sup E$$

(b) $(a_n)_n$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si $E = \{\ell\}$ si et seulement si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup E = \ell = \inf E = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{ok}$$

(c) Fixons $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \geq n$, on a

$$a_k \leq \sup_{k \geq n} a_k, b_k \leq \sup_{k \geq n} b_k$$

Donc

$$a_k + b_k \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k$$

alors

$$\sup_{k \geq n} (a_k + b_k) \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k$$

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Non !

Soient $a_n = (-1)^n$ et $b_n = (-1)^{n+1}$, on a toujours $a_n + b_n = 0$.

Donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0,$$

mais

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \quad \text{ok}$$

problèmes d'indices:
à gauche, ce devrait
être un m

Question 3. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit $f : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue. Montrer que si f est croissante alors

$$f(\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad \text{et} \quad f(\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Que dire si f est décroissante ?

Solution 3. Supposons d'abord que f est croissante. Soit

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Pour tout $n \geq 1$, posons $\alpha_n = \sup_{k \geq n} x_k$. La suite (α_n) est décroissante et converge vers L . On a

$$f(\alpha_n) = f\left(\sup_{k \geq n} x_k\right) \geq \sup_{k \geq n} f(x_k) \quad \text{car } f \text{ est croissante. ok}$$

De plus, pour tout $k \geq n$, on a $x_k \leq \alpha_n$, donc $f(x_k) \leq f(\alpha_n)$, d'où

Problème

$\sup_{k \geq n} f(x_k) \leq f(\alpha_n)$. On obtient donc

$$\sup_{k \geq n} f(x_k) = f(\alpha_n). \quad \text{il faut utiliser le fait que } f \text{ est continue !}$$

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} f(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n\right) = f\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Le cas de la limite inférieure se traite de manière analogue. En posant $\beta_n = \inf_{k \geq n} x_k$, la suite (β_n) est croissante et converge vers $\liminf x_n$. On a

$$f(\beta_n) = f\left(\inf_{k \geq n} x_k\right) = \inf_{k \geq n} f(x_k) \quad \text{car } f \text{ est croissante et continue !}$$

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = f\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Si f est décroissante, alors $g = -f$ est croissante. En appliquant le résultat précédent à g , on obtient

$$f(\limsup x_n) = \liminf f(x_n), \quad f(\liminf x_n) = \limsup f(x_n). \quad \text{ok.}$$

Question 4 (Limites de suites d'ensembles). On considère un ensemble E , et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E . Si $A \subset E$, on note $\mathbf{1}_A$ sa fonction caractéristique. On définit les deux ensembles

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

- Décrire "en mots" les propriétés caractéristiques des éléments de $\bigcap_n A_n$ et $\bigcup_n A_n$, puis "en mots" les propriétés caractéristiques des éléments de $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$.
- Exprimer les fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_{\liminf A_n}$ et $\mathbf{1}_{\limsup A_n}$ en fonction des fonctions $\{\mathbf{1}_{A_n}, n \geq 1\}$.
- Montrer que $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$.
- Montrer qu'on a toujours $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. Dans le cas où les deux ensembles coïncident, on les appelle $\lim A_n$.
- À partir d'ici, $E = \mathbb{R}$. Montrer que la suite $A_n = [-\frac{1}{n}, 1]$ admet une limite, et calculer cette limite. Faire de même pour $A'_n =]-\frac{1}{n}, 1]$.
- Trouver une suite A_n admettant pour limite $]0, 1]$.
- Calculer la $\limsup$ et la $\liminf$ de la suite $(B_n)_{n \geq 1}$, pour les ensembles

$$B_{2n-1} =]-2 - \frac{1}{n}, 1], \quad B_{2n} = [-1, 2 + \frac{1}{n^2}[, \quad n \geq 1.$$

- On suppose que $a_n \rightarrow -1$ et $b_n \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ces convergences impliquent-elles que $[a_n, b_n]$ a une limite quand $n \rightarrow \infty$?

Solution 4. (a) Un élément x appartient à $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ si et seulement si x appartient à tous les ensembles A_n , pour tout $n \geq 1$.

Un élément x appartient à $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ si et seulement s'il existe au moins un entier $n \geq 1$ tel que $x \in A_n$.

Un élément x appartient à $\liminf A_n$ si et seulement si x appartient à tous les ensembles A_n à partir d'un certain rang. **ok**

Un élément x appartient à $\limsup A_n$ si et seulement si x appartient à une infinité de A_n . **ok**

- Pour tout $x \in E$,

$$\mathbf{1}_{\liminf A_n}(x) = \liminf_{n \geq 1} \mathbf{1}_{A_n}(x)$$

$$\mathbf{1}_{\limsup A_n}(x) = \limsup_{n \geq 1} \mathbf{1}_{A_n}(x)$$

expliquer un peu ces formules

- $(\liminf A_n)^c = (\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k)^c = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k^c = \limsup A_n^c$ **ok**

- Pour tout $x \in \liminf A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k$, il existe $n \geq 1$, tel que pour tout $k \geq n$, on a $x \in A_k$.

Donc, pour tout $m \geq 1$, on choisit $l \geq m$ tel que $l \geq n$, alors $x \in A_l$

Ainsi, $x \in \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{l \geq m} A_l = \limsup A_n$.

Par conséquent, $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

ok, mais cette inclusion se voit aussi directement à partir du (a).

(e) Par définition,

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} [-\frac{1}{k}, 1] = \bigcup_{n \geq 1} [0, 1] = [0, 1]$$

$$\limsup A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} [-\frac{1}{k}, 1] = \bigcap_{n \geq 1} [-\frac{1}{n}, 1] = [0, 1]$$

Ainsi, $\lim A_n = [0, 1]$.

De même, $\lim A'_n = [0, 1]$ **ok**

(f) Prenons $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$, alors $\lim A_n =]0, 1]$ **ok (il faudrait détailler un peu)**

(g) Comme $\bigcap_{k \geq n} B_k = [-1, 1]$ et $\bigcup_{k \geq n} B_k =]-2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n^2}[$
Par définition,

$$\liminf B_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} B_k = \bigcup_{n \geq 1} [-1, 1] = [-1, 1] \quad \text{ok}$$

$$\limsup B_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} B_k = \bigcap_{n \geq 1}]-2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n^2}[= [-2, 2] \quad \text{ok}$$

(h) Oui, $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n, b_n] = [-1, 1]$ **NON. Il faut faire attention aux bornes de l'intervalle, on ne sait pas si a_n et b_n restent du même côté de -1 et 1.**

Question 5. Soient X un ensemble non vide et une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ bornées, qui converge simplement vers $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bornée.

(a) Montrer que

$$\sup_{x \in X} f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f_n(x).$$

Établir une inégalité analogue pour l'inf.

(b) Donner un exemple où l'inégalité est stricte. Montrer qu'il y a égalité si la convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est uniforme.

Solution 5. (a) Soient $g_n(x) = \sup_{x \in X} f_n(x)$ des fonctions constantes, alors pour tout $x \in X$, on a $f_n(x) \leq g_n(x)$.

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f_n(x)$$

Ainsi,

$$\sup_{x \in X} f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f_n(x). \quad \text{ok} \quad \text{identité pour inf f(x) ?}$$

(b) Prenons

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} n, & \text{si } x \in]0, \frac{1}{n}[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

alors (f_n) converge simplement vers $f = 0$. ok

On a $\sup_{x \in X} f(x) = 0$, mais

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} n = \infty. \quad \text{ok}$$

Si la convergence est uniforme, montrons qu'on a égalité. Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in X$,

$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

En prenant le **supremum sur x** dans la seconde inégalité, on obtient pour $n \geq N$:

$$\sup_{x \in X} f_n(x) \leq \sup_{x \in X} f(x) + \varepsilon.$$

argument pas clair

D'autre part, de la première inégalité on tire $f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon$, donc en prenant le **supremum sur x** :

$$\sup_{x \in X} f(x) \leq \sup_{x \in X} f_n(x) + \varepsilon$$

C'est-à-dire

$$\sup_{x \in X} f(x) - \varepsilon \leq \sup_{x \in X} f_n(x).$$

Ainsi, pour $n \geq N$,

$$\sup_{x \in X} f(x) - \varepsilon \leq \sup_{x \in X} f_n(x) \leq \sup_{x \in X} f(x) + \varepsilon, \quad \text{argument à revoir}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f_n(x) = \sup_{x \in X} f(x).$$

En particulier,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f_n(x) = \sup_{x \in X} f(x).$$